УДК 519.72; 519.65
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2054-2061

# КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАЗЛОЖЕНИЯ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ ПО ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМ СДВИГАМ ФУНКЦИИ ГАУССА

© **А. С. Тимашов**

Воронежский институт МВД России
394065, Российская Федерация, г. Воронеж, Проспект Патриотов, 53
E-mail: loaderrus@gmail.com

В работе приводятся результаты численных расчётов, подтверждающих вычислительную эффективность метода аппроксимации цифровых сигналов при помощи разложения по целочисленным сдвигам функции Гаусса. Метод основан на использовании узловых функций и приближения бесконечномерной системы линейных уравнений конечномерными. Продемонстрировано, что с использованием выбранного метода происходит эффективное приближение цифровых сигналов с различными свойствами: нормальных распределений с различными соотношениями параметров, распределений Коши, треугольных и трапециевидных сигналов, меандров сложной формы. Следует особо отметить, что рассматриваемый метод даёт хорошие результаты для исследования смеси различных сигналов, их идентификации и разложения, в том числе сигналов с "тяжёлыми хвостами" таких, как распределение Коши. В конце статьи перечислены основные результаты автора, полученные для данного класса задач, указаны возможные дальнейшие приложения и обобщения.

*Ключевые слова:* цифровые сигналы; аппроксимации; функции Гаусса; нормальное распределение; распределение Коши

## 1. Введение

Рассмотрим задачу о разложении достаточно произвольного цифрового сигнала по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса (квадратичной экспоненты с параметрами). Для численного анализа и приложений основную роль играют приближения данного типа конечными суммами, которые возникают при усечении соответствующих рядов. Историю вопроса, основные результаты и многочисленные приложения см. в работах [1]–[10].

В работе приводятся результаты численных расчётов, подтверждающих вычислительную эффективность метода аппроксимации цифровых сигналов при помощи разложения по целочисленным сдвигам функции Гаусса. Метод основан на использовании узловых функций и приближения бесконечномерной системы линейных уравнений конечномерными. Продемонстрировано, что с использованием выбранного метода происходит эффективное приближение цифровых сигналов с различными свойствами: нормальных распределений с различными соотношениями параметров, распределений Коши, треугольных и трапециевидных сигналов, меандров сложной формы. Следует особо отметить, что рассматриваемый метод даёт хорошие результаты для исследования смеси различных сигналов, их идентификации и разложения, в т. ч. сигналов с "тяжёлыми хвостами" таких, как распределение Коши. В конце статьи перечислены основные результаты автора, полученные для данного класса задач, указаны возможные дальнейшие приложения и обобщения.

## 2. Интерполяционная задача для разложения цифровых сигналов по целочисленным сдвигам функции Гаусса

**Интерполяционная задача:** рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, заданную на всей оси $x \in \mathbb{R}$, и некоторый параметр $\sigma > 0$, который в вероятностных приложениях играет роль среднеквадратичного отклонения. Будем искать интерполирующую функцию $\tilde{f}(x)$, также определённую на всей оси $x \in \mathbb{R}$, которая представляется в виде ряда по целочисленным сдвигам функции Гаусса

$$\tilde{f}\,(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

и совпадает с исходной функцией во всех целых точках

$$f\,(m) = \tilde{f}\,(m)\,,\; m \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Известны несколько подходов к решению поставленной задачи. При первом подходе решение ищется с помощью специальных функций, а именно, тета–функций Якоби [1]–[3]. Однако, как показано в [4], несмотря на теоретическую ценность этого подхода, он не имеет вычислительных перспектив, т. к. связан с делением на чрезвычайно малые знаменатели. Другой подход разрабатывался в [2]–[3], он основан на применении дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Такой подход имеет определённую вычислительную ценность, но она достигается ценой усложнения алгоритма, при этом вычисления эффективны в достаточно узких диапазонах параметров и с небольшим числом разрядов в результатах. Чтобы преодолеть указанные трудности, в работах [8]–[10] был предложен прямой метод решения поставленной задачи интерполяции, основанный на сведении её к решению конечных систем линейных уравнений.

Существенным препятствием для развития этого метода являлось отсутствие результатов по доказательству однозначной разрешимости соответствующих систем линейных уравнений. Поэтому в работе [5] были получены результаты, устанавливающие требуемую однозначную разрешимость линейных систем. Эти результаты являются теоретическим обоснованием для разработки практических численных алгоритмов, избавленных от необходимости работы со специальными функциями или ДПФ.

Для дальнейшего изложения введём удобное обозначение для квадратичной экспоненты

$$e\,(\sigma, x, k) = e^{-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}} \tag{3}$$

Решение поставленной задачи сводится к нахождению последовательности неизвестных коэффициентов $f_k$ из (1). Для этого, следуя стандартной схеме решения задач интерполяции, необходимо построить узловые функции для каждого узла интерполяции $x = m,\; m \in \mathbb{Z}$. В нашем случае достаточно построить одну *базисную узловую функцию* для узла при $x = 0$, которую мы будем искать в виде

$$G\,(\sigma, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k\; e(\sigma, x, k). \tag{4}$$

Вывод определяющих соотношений и бесконечной системы линейных уравнений для нахождения коэффициентов базисной узловой функции известен, см. [4]–[5].

Из (2) следует, что эта базисная узловая функция должна удовлетворять основному условию при всех $m \in \mathbb{Z}$:

$$G\,(\sigma, m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k\; e(\sigma, m, k) = \sigma_{m0}, \tag{5}$$

где $\sigma_{m0}$ есть символ Кронекера

$$\sigma_{m0} = \begin{cases} 1, \ m = 0 \\ 0, \ m \neq 0. \end{cases}$$

Предположим, что такая функция $G(\sigma, x)$, удовлетворяющая условию (5), уже найдена. Тогда нетрудно выписать формальное решение поставленной задачи. Действительно, функция

$$G_l(\sigma, x) = G(\sigma, x - l)$$

является узловой функцией для узла при $x = l$, так как при всех значениях $m$

$$G_l(\sigma, m) = G(\sigma, m - l) = \sigma_{ml}.$$

Тогда одним из решений поставленной интерполяционной задачи будет, очевидно, функция

$$\tilde{f}(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l)\, G_l(\sigma, x), \tag{6}$$

т. к. при $x = m$ от суммы (6) остаётся только одно слагаемое:

$$f(m)\, G_m(\sigma, m) = f(m) \cdot 1 = f(m).$$

Чтобы перейти от представления решения в виде (6) к искомому представлению в виде (1), выполним необходимую подстановку. В результате получим с учётом (4):

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\ e(\sigma, x, j), \tag{7}$$

где искомые коэффициенты разложения представляются в виде (после замены индексов $j \rightleftarrows k$, чтобы согласовать результат с (1)),

$$f_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(k - j)\, g_j, \tag{8}$$

где $f(m)$ — значения заданной функции в целых точках, а $g_j$ — коэффициенты разложения базисной узловой функции (4).

Преобразуем систему уравнений:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e(\sigma, m, k) = \sigma_{m0}, \ m \in \mathbb{Z}.$$

Для этого введём новую переменную $q = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}$. Получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k q^{(m-k)^2} = \sigma_{m0}, \ m \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Для численного решения необходимо рассмотреть конечномерные усечения полученной бесконечной системы уравнений (9).

## 3. Компьютерный анализ математической модели

Как было показано выше, при решении задач интерполяции ключевым моментом является построение узловой функции. Перейдём теперь к рассмотрению конечномерных приближений первоначальной интерполяционной задачи, которые получаются в результате перехода от бесконечномерной системы к её конечномерным “усечениям”. Этот естественный подход, основанный на приближении решений изучаемой интерполяционной задачи решениями конечномерных систем, рассматривался в работах [8]–[10]. Разумеется, такой подход имеет свои ограничения, но вместе с тем он позволяет обойти некоторые сложности, возникающие при перечисленных выше других подходах, и расширяет возможности эффективного численного решения интерполяционной задачи.

Проведено компьютерное исследование решений полученных конечномерных систем линейных уравнений численными методами при помощи математического пакета MATHEMATICA при широком наборе управляющих параметров $q, \sigma$. Приведем некоторые результаты компьютерных расчетов.

Приведём графики построенной при решении линейных систем базисной узловой функции при значениях аргумента вблизи начала координат

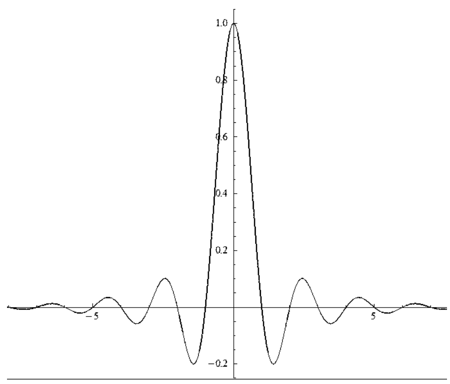


Рис. 1. Базисная узловая функция вблизи начала координат

и тот же график при больших значениях аргумента.

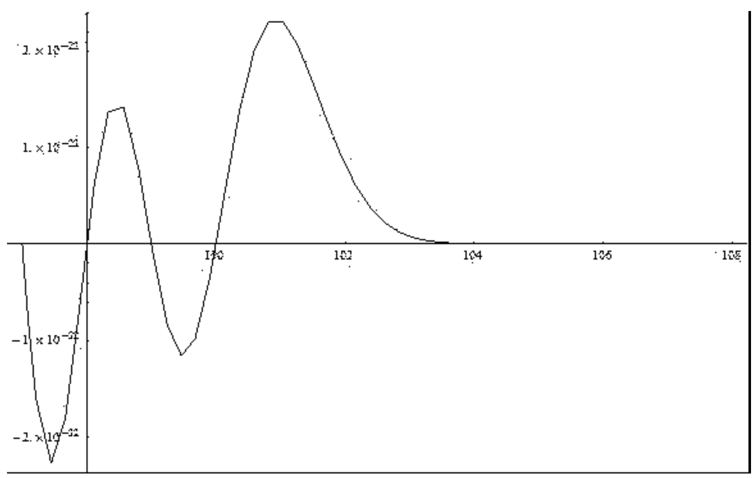


Рис. 2. Базисная узловая функция при больших аргументах

Из графиков видно хорошее совпадение полученных значений с ожидаемыми. В частности, построенные аппроксимации чётко проходят в целочисленных узлах через нулевые значения.

Качество приближений также оценено количественно как величина ошибки в различных нормах.

Кроме того, численно показано, что при увеличении размерности приближающих систем их решения стремятся к предельным значениям, которые следует принять за решение исходной бесконечной системы уравнений.

Рассмотрено разложение указанным методом по целочисленным сдвигам функции Гаусса основного набора стандартных электрических сигналов: переключательных режимов, кусочно-постоянных, прямоугольных, треугольных, сложной формы, включая различные нерегулярные меандры. Выведен большой объём графиков для аппроксимаций этих сигналов, проанализированы ошибки приближений, вычислены количественные характеристики ошибок, среднеквадратичные и равномерные.

Для примера приведём исходный и построенный рассмотренным методом экспоненциальной квадратичной интерполяции графики для сигнала прямоугольной формы и для сигнала пилообразной формы.

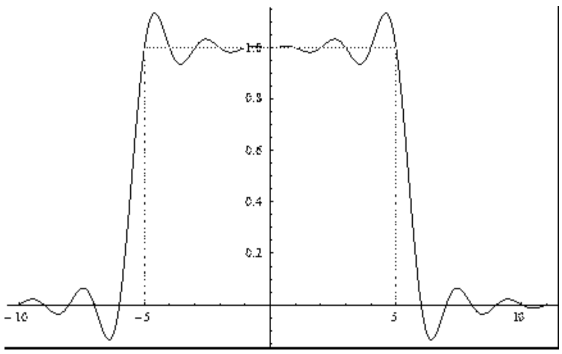


Рис. 3. Интерполяция прямоугольного сигнала

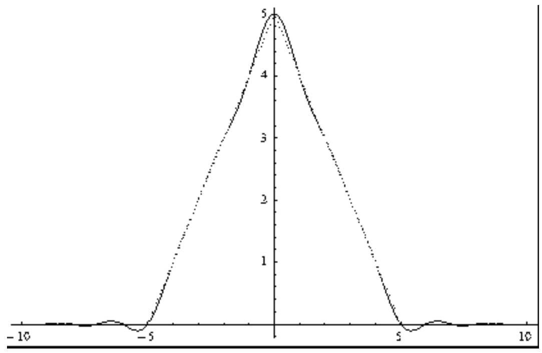


Рис. 4. Интерполяция пилообразного сигнала

На приведённых графиках видно точное совпадение исходного и приближённого сигналов в целочисленных узлах. Кроме того, следует отметить достаточно высокую точность приближения и между узлами, что наглядно видно на представленных графиках.

## 4. Некоторые дополнения и приложения

Качество приближений также оценено путём вычисления ошибки в различных нормах.

Рассмотрены приложения полученных теоретических и численных результатов к теории фильтрации электрических сигналов. Произведён численный расчёт и анализ погрешности для реализации фильтров, близких к идеальным. Для этого реализации фильтров как свёрток с исследованными ранее стандартными сигналами смоделированы с использованием приближений сигналов целочисленными сдвигами функций Гаусса.

Также отметим, что непрерывная интегральная версия конечномерного квадратичного экспоненциального разложения также широко используется под названием преобразование Габора в теории всплесков, она также находит применения в теории операторов преобразования, см. [11]–[15].

Отметим также, что возможен альтернативный подход для данного круга задач, при котором базисные функции не используются, а применяется теория положительно определённых функций, см. [16]–[18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Maz'ya V., Schmidt G.* Approximate approximations // AMS Mathematical Surveys and Monographs. 2007.

2. *Журавлёв М.В., Киселёв Е.А., Минин Л.А., Ситник С.М.* Тета–функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса // Современная математика и её приложения. Т. 67. Уравнения в частных производных. Тбилиси, 2010. С. 107–116.

3. *Zhuravlev M.V., Kiselev E.A., Minin L.A., Sitnik S.M.* Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Sciences. Springer. 2011. V. 173. № 2. P. 231–241.

4. *Минин Л.А., Журавлев М.В., Ситник С.М.* О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2009. № 13(68). Вып. 17/2. С. 89–99.

5. *Ситник С.М., Тимашов А.С., Ушаков С.Н.* Метод конечномерных приближений в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2015. № 17(214). Вып. 40. С. 130–142.

6. *Киселев Е.А., Минин Л.А., Новиков И.Я., Ситник С.М.* О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов // Математические заметки. 2014. Т. 96. Вып. 2. С. 239–250.

7. *Kiselev E.A., Minin L.A., Novikov I.Ya., Sitnik S.M.* On the Riesz Constants for Systems of Integer Translates // Mathematical Notes. Springer. 2014. V. 96. Iss. 1–2. P. 228–238.

8. *Ситник С.М., Тимашов А.С.* Расчёт конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2013. № 19(162). Вып. 32. С. 184–186.

9. *Ситник С.М., Тимашов А.С.* Метод конечномерных приближений в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции сигналов // Вестник Воронежского института МВД России. 2014. № 2. С. 163–171.

10 . *Ситник С.М., Тимашов А.С.* Вычислительные аспекты метода квадратичной экспоненциальной интерполяции в задачах теории сигналов // Материалы семнадцатого научно-практического семинара "Новые информационные технологии в автоматизированных системах". М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. 2014. С. 292–300.

11 . *Sitnik S.M.* Buschman–Erdelyi transmutations, classification and applications // In the book: Analytic Methods Of Analysis And Differential Equations: Amade 2012. Cambridge Scientific Publishers, Cottenham, Cambridge. 2013. P. 171–201.

12 . *Ситник С.М.* Операторы преобразования и их приложения // Исследования по современному анализу и математическому моделированию. Владикавказ: Владикавказский научный центр РАН и РСО–А. 2008. С. 226—293.

13 . *Sitnik S.M.* Transmutations and Applications: a survey // arXiv: 1012.37412012. 2012. 141 p.

14 . *Катрахов В.В., Ситник С.М.* Композиционный метод построения $B-$ эллиптических, $B-$ – гиперболических и $B-$ параболических операторов преобразования // Доклады РАН. 1994. Т. 337. № 3. С. 307—311.

15 . *Ситник С.М.* Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана-Эрдейи // ДАН СССР. 1991. Т. 320. № 6. С. 1326–1330.

16 . *Ситник С.М., Певный А.Б.* Строго положительно определённые функции, неравенства М.Г. Крейна и Е.А. Горина // Материалы восемнадцатого научно-практического семинара "Новые информационные техно-

логии в автоматизированных системах". М., Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. 2015. С. 247–254.

17 . *Ситник С.М., Певный А.Б.* Неравенства для строго положительно определённых функций // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2015. Т. 40. Вып. 17. С. 106–114.

18 . *Pevnyi A.B., Sitnik S.M.* Inequalities of M.G. Krein, Yu.V. Linnik and E.A. Gorin for positive definite functions // 2016. arXiv:1609.01218 . 9 p.

Поступила в редакцию 20 октября 2016 г.

Тимашов Александр Сергеевич, Воронежский институт МВД России, г. Воронеж, Российская Федерация, адъюнкт, кафедра математики и моделирования систем, e-mail: loaderrus@gmail.com

UDC 519.72; 519.65
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2054-2061

# COMPUTER ANALYSIS OF A MATHEMATICAL MODEL BASED ON EXPANSION OF DIGITAL SIGNALS IN SERIES OF INTEGER SHIFTS OF THE GAUSS FUNCTION

© **A. S. Timashov**

Voronezh institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia
53 Patriotov Avenue, Voronezh, Russian Federation, 394065
E-mail: loaderrus@gmail.com

This paper contain results of numerical calculations which prove the effectiveness of the method of approximation for digital signals by integer shifts of the Gauss function. The method is based on usage of nodal functions and approximations of infinite systems of linear equations by finite ones. It is demonstrated that by this method an effective approximation of signals of different nature is attained: normal distributions, Cauchy distributions, triangular and trapezoid signals, meanders of complex forms. We specially recall that this method is effective for mixtures of different distributions, their identification and expansions, including so-called "heavy-tailed"signals, such as Cauchy distribution. At the end of the paper author's results are briefly outlined together with some generalizations and applications.

*Key words:* digital signals; Gauss function; normal distribution; Cauchy distribution

REFERENCES

1 . *Maz'ya V., Schmidt G.* Approximate approximations // AMS Mathematical Surveys and Monographs. 2007.

2 . *ZHuravlyov M.V., Kiselyov E.A., Minin L.A., Sitnik S.M.* Teta–funktsii YAkobi i sistemy tselochislennyh sdvigov funktsij Gaussa // Sovremennaya matematika i eyo prilozheniya. T. 67. Uravneniya v chastnyh proizvodnyh. Tbilisi, 2010. S. 107–116.

3 . *Zhuravlev M.V., Kiselev E.A., Minin L.A., Sitnik S.M.* Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Sciences. Springer. 2011. V. 173. № 2. P. 231–241.

4 . *Minin L.A., ZHuravlev M.V., Sitnik S.M.* O vychislitel'nyh osobennostyah interpolyatsii s pomoshch'yu tselochislennyh sdvigov gaussovyh funktsij // Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika. 2009. № 13(68). Vyp. 17/2. S. 89–99.

5 . *Sitnik S.M., Timashov A.S., Ushakov S.N.* Metod konechnomernyh priblizhenij v zadachah kvadratichnoj eksponentsial'noj interpolyatsii // Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika. 2015. № 17(214). Vyp. 40. S. 130–142.

6 . *Kiselev E.A., Minin L.A., Novikov I.YA., Sitnik S.M.* O konstantah Rissa dlya nekotoryh sistem tselochislennyh sdvigov // Matematicheskie zametki. 2014. T. 96. Vyp. 2. S. 239–250.

7 . *Kiselev E.A., Minin L.A., Novikov I.Ya., Sitnik S.M.* On the Riesz Constants for Systems of Integer Translates // Mathematical Notes. Springer. 2014. V. 96. Iss. 1–2. P. 228–238.

8 . *Sitnik S.M., Timashov A.S.* Raschyot konechnomernoj matematicheskoj modeli v zadache kvadratichnoj eksponentsial'noj interpolyatsii // Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika. 2013. № 19(162). Vyp. 32. S. 184–186.

9 . *Sitnik S.M., Timashov A.S.* Metod konechnomernyh priblizhenij v zadachah kvadratichnoj eksponentsial'noj interpolyatsii signalov // Vestnik Voronezhskogo instituta MVD Rossii. 2014. № 2. S. 163–171.

10 . *Sitnik S.M., Timashov A.S.* Vychislitel'nye aspekty metoda kvadratichnoj eksponentsial'noj interpolyatsii v zadachah teorii signalov // Materialy semnadtsatogo nauchno-prakticheskogo seminara "Novye informatsionnye tekhnologii v avtomatizirovannyh sistemah". M.: Institut prikladnoj matematiki im. M.V. Keldysha RAN. 2014. S. 292–300.

11 . *Sitnik S.M.* Buschman–Erdelyi transmutations, classification and applications // In the book: Analytic Methods Of Analysis And Differential Equations: Amade 2012. Cambridge Scientific Publishers, Cottenham, Cambridge. 2013. P. 171–201.

12 . *Sitnik S.M.* Operatory preobrazovaniya i ih prilozheniya // Issledovaniya po sovremennomu analizu i matematicheskomu modelirovaniyu. Vladikavkaz: Vladikavkazskij nauchnyj tsentr RAN i RSO–A. 2008. C. 226—293.

13 . *Sitnik S.M.* Transmutations and Applications: a survey // arXiv: 1012.37412012. 2012. 141 p.

14 . *Katrahov V.V., Sitnik S.M.* Kompozitsionnyj metod postroeniya $B-$ ellipticheskih, $B-$ giperbolicheskih i $B-$ parabolicheskih operatorov preobrazovaniya // Doklady RAN. 1994. T. 337. № 3. S. 307—311.

15 . *Sitnik S.M.* Faktorizatsiya i otsenki norm v vesovyh lebegovyh prostranstvah operatorov Bushmana-Erdeji // DAN SSSR. 1991. T. 320. № 6. S. 1326–1330.

16 . *Sitnik S.M., Pevnyj A.B.* Strogo polozhitel'no opredelyonnye funktsii, neravenstva M.G. Krejna i E.A. Gorina // Materialy vosemnadtsatogo nauchno-prakticheskogo seminara "Novye informatsionnye tekhnologii v avtomatizirovannyh sistemah". M., Institut prikladnoj matematiki im. M.V. Keldysha RAN. 2015. S. 247–254.

17 .*Sitnik S.M., Pevnyj A.B.* Neravenstva dlya strogo polozhitel'no opredelyonnyh funktsij // Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika. 2015. T. 40. Vyp. 17. S. 106–114.

18 .*Pevnyi A.B., Sitnik S.M.* Inequalities of M.G. Krein, Yu.V. Linnik and E.A. Gorin for positive definite functions // arXiv:1609.01218. 2016. 9 p.

Received 20 October 2016

Timashov Alexander Sergeevich, Voronezh Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, the Russian Federation, Post graduate of the Mathematics and system modelling Department, e-mail: loaderrus@gmail.com

**Информация для цитирования:**

*Тимашов А.С.* Компьютерный анализ математической модели разложения цифровых сигналов по целочисленным сдвигам функции Гаусса // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 2054-2061. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2054-2061

*Timashov A.S.* Komp'yuternyj analiz matematicheskoj modeli razlozheniya tsifrovyh signalov po tselochislennym sdvigam funktsii Gaussa [Computer analysis of a mathematical model based on expansion of digital signals in series of integer shifts of the Gauss function]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 2054-2061. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2054-2061 (In Russian)